Lycée secondaire Bach Hamba	Classes : 4ème Economie gestion$_3$
Prof: Mme Bayoudh	Date : 05/11/2012

Devoir de controle n °1 en mathématiques

Exercice 1 : (5 points)

Une usine fabrique 3 sortes d'articles a_1, a_2, a_3 à partir de 3 modules m_1, m_2, m_3. On donne :

Modules \ articles	a_1	a_2	a_3
m_1	3	9	5
m_2	4	0	9
m_3	4	8	6

Modules	m_1	m_2	m_3
Poids unitaires (en kg)	5	6	3
Coûts unitaires (en DT)	180	250	150

On lit par exemple:Pour fabriquer un article a_2 il faut 9 modules m_1 e t8 modules m_3

Un module m_1 pèse 5 kg et coûte 180dinars.

On note $A = \begin{pmatrix} 3 & 9 & 5 \\ 4 & 0 & 9 \\ 4 & 8 & 6 \end{pmatrix}$ et $M = \begin{pmatrix} 5 & 6 & 3 \\ 180 & 250 & 150 \end{pmatrix}$

1) **a.** Calculer la matrice B = M.A

b. Interpréter les lignes de cette matrice.

2) Une semaine donnée, l'usine doit fournir 8 articles a_1, 12 articles a_2 et 13 articles a_3.

Elle dispose en début de semaine d'un stock de 200 modules de chaque sorte.

On note F la matrice : $F = \begin{pmatrix} 8 \\ 12 \\ 13 \end{pmatrix}$

a. Calculer le produit matriciel B.F.

En déduire le poids total et le coût total des articles de cette demande.

b.Calculer le produit matriciel A.F. Que représente-t-il ?

c. La demande (8 articles a_1, 12 articles a_2 et 13 articles a_3) peut-elle être satisfaite ?

Exercice 2 : (4.5 points)

Soit f la fonction définie sur IR par : $f(x) = \begin{cases} x^3 - 2x + x - 3 & si\ x \succ 1 \\ \sqrt{x^2+3} - 5x & si\ x \leq 1 \end{cases}$

1) Calculer $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$ et $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x)$.

2) f est -elle continue en 1? justifier.

3) **a /** Montrer que l'équation $f(x) = 0$ admet au moins une solution α dans $[-1,1]$

b / α appartient-il à $[-1,0]$ ou $[0,1]$? Justifier.

Exercice 3 : ***(7.5 points)***

Un parfumeur utilise des essences de rose et de lavande pour fabriquer trois parfums différents

Soit la matrice $A = \begin{pmatrix} 15 & 25 \\ 30 & 20 \\ 20 & 10 \end{pmatrix}$

Chaque ligne de la matrice A indique pour un parfum la composition selon les essences(en ml).

Ainsi le premier parfum comporte 15 ml d'essence de rose et 25 ml d'essence de lavande.

1) Donner la composition des deuxième et troisième parfums.

2) 1 ml d'essence de rose coûte 2 dinars et 1 ml d'essence de lavande coûte 1,2 dinars

Le parfumeur code cela à l'aide de la matrice $P = \begin{pmatrix} 2 \\ 1{,}2 \end{pmatrix}$.

a/ Calculer la matrice B=AP

b/ Que représente B ?

3) Le pafumeur décide de réaliser un gain égal à 25% du coût de chaque parfum.

Soit V la matrice des prix de ventes des parfums.

a/ Montrer que V=1,25.B

b/ Déterminer alors la matrice V.

4) Le parfumeur dispose de 310 ml d'essence de rose et 280ml d'essence de lavande pour fabriquer 15 parfums.

On se propose de déterminer le nombre de parfums fabriqués de chaque type.

a/ Justifier que le problème revient à résoudre le système suivants :

$$(S) : \begin{cases} 15x + 30y + 20z = 310 \\ 25x + 20y + 10z = 280 \\ x + y + z = 15 \end{cases}$$

b/ On pose $M = \begin{pmatrix} 15 & 30 & 20 \\ 25 & 20 & 10 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ et $N = \begin{pmatrix} -2 & 2 & 20 \\ 3 & 1 & -70 \\ -1 & -3 & 90 \end{pmatrix}$

Calculer M.N, En déduire que la matrice inverse de M est $M^{-1} = \frac{1}{40}.N$

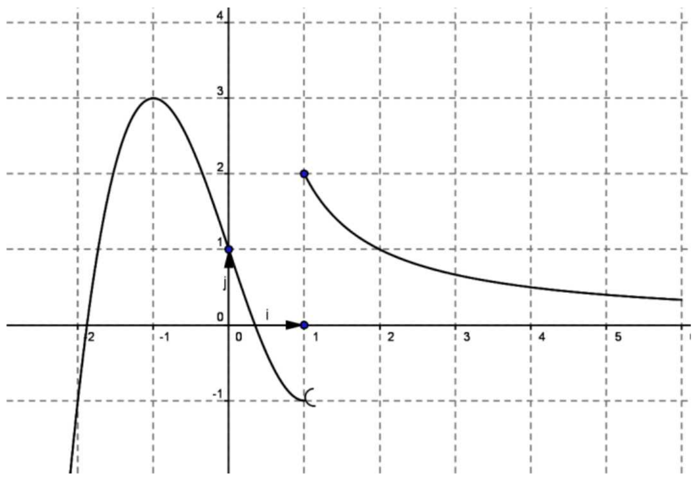
c/ Résoudre alors le système (S).

En déduire le nombre de parfums fabriqués de chaque type.

Nom & Prénom : . . . .

Lecture graphique : ***(3points)***

La courbe ci-dessous est la représentation graphique d'une fonction f définie sur IR



Pour chacune des propositions suivantes , une seule réponse est correcte .
Cocher la bonne réponse .(Aucune justification n'est demandée).

1) $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) =$ ☐ $+\infty$ ☐ $-\infty$ ☐ 0

2) $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) =$ ☐ $+\infty$ ☐ $-\infty$ ☐ 0

3) f est discontinue en ☐ 1 ☐ -1 ☐ 2

4) $\lim\limits_{x \to 1^-} f(x) =$ ☐ 2 ☐ -1 ☐ n'existe pas

5) $\lim\limits_{x \to +\infty} f\left(\dfrac{2-x}{x+7}\right) =$ ☐ $+\infty$ ☐ -1 ☐ 3

6) L'équation $f(x) = 0$, admet :
☐ une solution ☐ deux solutions ☐ trois solutions

Bon travail et bonne chance

Lycée secondaire Bach hamba		***4ème Eco***
Mme Bayoudh	***correction du devoir de contrôle n°1***	***Novembre 2012***

Exercice1 :

1) a/ $B = M \times A = \begin{pmatrix} 5 & 6 & 3 \\ 180 & 250 & 150 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3 & 9 & 5 \\ 4 & 0 & 9 \\ 4 & 8 & 6 \end{pmatrix}$ Soit $B = \begin{pmatrix} 51 & 69 & 97 \\ 2140 & 2820 & 4050 \end{pmatrix}$

b/ La première ligne de la matrice B donne le poids unitaire de chaque article et la seconde ligne donne le coùt unitaire de chaque article.

2) a/ $B \times F = \begin{pmatrix} 51 & 69 & 97 \\ 2140 & 2820 & 4050 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 8 \\ 12 \\ 13 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2497 \\ 103610 \end{pmatrix}$

- Le poids total des articles de cette demande est :2497Kg
- Le coût total des articles de cette demande est :103610DT

b/ $A \times F = \begin{pmatrix} 3 & 9 & 5 \\ 4 & 0 & 9 \\ 4 & 8 & 6 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 8 \\ 12 \\ 13 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 197 \\ 149 \\ 206 \end{pmatrix}$

Ce produit représente le nombre de modules de chaque type nécessaires fabrication des articles commandés :

il faut 197 modules m_1 149 modules m_2 et 206 modules m_3 .

c/ L'usine ne disposant que de 200 modules m_3 , **la demande ne peut pas être satisfaite**.

Exercice2 :

1) $\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} x^3 - 2x + x - 3 = \lim_{x\to+\infty} x^3 = +\infty$

$\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty} \sqrt{x^2+3} - 5x$

Or $\lim_{x\to-\infty} \sqrt{x^2+3} = +\infty$ (puisque $\lim_{x\to-\infty} x^2 + 3 = +\infty$) et $\lim_{x\to-\infty} (-5x) = +\infty$

Alors $\lim_{x\to-\infty} f(x) = +\infty$

2) f(1)=$\sqrt{1^2+3} - 5\times 1 = 2 - 5 = -3$

$\lim_{x\to1^+} f(x) = \lim_{x\to1^+} x^3 - 2x + x - 3 = 1 - 2 + 1 - 3 = -3$

$\lim_{x\to1^-} f(x) = \lim_{x\to1^-} \sqrt{x^2+3} - 5x = 2 - 5 = -3$

Ainsi $\lim_{x\to1^+} f(x) = \lim_{x\to1^-} f(x) = f(1)$ alors f est continue en 1

3) a/ La fonction : $x \mapsto x^2 + 3$ étant positive et continue ,en particulier sur $[-1,1]$

La fonction : $x \mapsto -5x$ étant une fonction linéaire , alors elle est continue en particulier sur $[-1,1]$ .Par conséquent f est continue sur $[-1,1]$

$f(-1) = 2 + 5 = 7$ et $f(1) = -3 \Rightarrow f(-1)\times f(1) \prec 0$

D'aprés le théorème des valeurs intermédiaires, l'équation $f(x) = 0$ admet au moins une solution α dans $[-1,1]$

b/ $f(0) = \sqrt{3} \succ 0$ et $f(1) = -3 \prec 0$ alors $\alpha \in [0,1]$

Exercice3 :

1) Le deuxième parfum comporte **30 ml d'essence de rose et 20 ml d'essence de lavande** .
Le troisième parfum comporte **20ml d'essence de rose et 10ml d'essence de lavande.**

2) a/ $B = A \times P = \begin{pmatrix} 15 & 25 \\ 30 & 20 \\ 20 & 10 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ 1,2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 60 \\ 84 \\ 52 \end{pmatrix}$

b/ B représente les coûts des trois parfums, **60DT** pour le premier parfum, **84DT** pour le deuxième et **52DT**pour le troisième.

3) a/ $V = B + \frac{25}{100}B = \frac{100}{100}B + \frac{25}{100}B = \frac{125}{100}B = 1,25B$

b/ $V = \begin{pmatrix} 75 \\ 105 \\ 65 \end{pmatrix}$

4) a/ On désigne par x,y et z les quantitées de parfums fabriqués respectivement de type 1,2 et 3

- Le volume d'essence de rose utilisé est 310ml alors **15x+30y+20z=310**
- Le volume d'essence de lavande utilisé est 280 ml alors **25x+20y+10z=280**
- Le nombre de parfums fabriqués est 15 alors **x+y+z=15**

D'où le système $(S): \begin{cases} 15x + 30y + 20z = 310 \\ 25x + 20y + 10z = 280 \\ x + y + z = 15 \end{cases}$

b/ $M \times N = \begin{pmatrix} 15 & 30 & 20 \\ 25 & 20 & 10 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -2 & 2 & 20 \\ 3 & 1 & -70 \\ -1 & -3 & 90 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 40 & 0 & 0 \\ 0 & 40 & 0 \\ 0 & 0 & 40 \end{pmatrix}$

$M \times N = 40I_3 \quad \Leftrightarrow \; M \times \frac{1}{40}N = I_3$ Alors $M^{-1} = \frac{1}{40}N$

c/ on pose X=$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ la matrice des inconnues , C=$\begin{pmatrix} 310 \\ 280 \\ 15 \end{pmatrix}$ la matrice des constantes

L'écriture matricielle du système (S) est : $M.X = C \quad \Leftrightarrow X = M^{-1}.C$

ainsi $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \frac{1}{40} \begin{pmatrix} -2 & 2 & 20 \\ 3 & 1 & -70 \\ -1 & -3 & 90 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 310 \\ 280 \\ 15 \end{pmatrix} = \frac{1}{40} \begin{pmatrix} 240 \\ 160 \\ 200 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 \\ 4 \\ 5 \end{pmatrix}$

Le parfumeur a donc fabriqué 6 parfums du type1 , 4 parfums du type2 et 5 parfums du type3.

Lecture graphique :

1) $\lim_{x \to +\infty} f(x) = 0$

2) $\lim_{x \to -\infty} f(x) = -\infty$

3) f est discontinue en 1

4) $\lim_{x \to 1^-} f(x) = -1$

5) $\lim_{x \to +\infty} f(\frac{2-x}{x+7}) = 3$ en effet $\lim_{x \to +\infty} \frac{2-x}{x+7} = \lim_{x \to +\infty} \frac{-x}{x} = -1$ et $\lim_{x \to -1} f(x) = f(-1) = 3$

6) L'équation $f(x) = 0$ admet 2 solutions.